

Corrigé de l'examen final

Problème 1 (5 points)

1-1. Les zéros et les pôles de $H(z)$ correspondent respectivement aux racines du numérateur et de son dénominateur, à condition que $H(z)$ soit sous forme irréductible. Ici, le numérateur a une seule racine $z = 0$ alors que le dénominateur a deux racines : $z = 1/2$ et $z = -1/3$. Les racines du dénominateur sont toutes différentes de celle du numérateur, ce qui prouve que $H(z)$ est sous forme irréductible, et on a donc :

- un zéro $z = 0$;
- deux pôles $z = 1/2$ et $z = -1/3$.

Si le filtre est causal, sa réponse impulsionnelle est un signal de droite et la région de convergence de sa fonction de transfert est de la forme $|z| > a$ où a désigne le module du plus grand pôle. Ici, $a = 1/2$ et la région de convergence est donc $|z| > 1/2$. Le filtre est stable car le cercle unité est inclus dans la région de convergence.

1-2. Dans le domaine des z , la relation entrée-sortie s'écrit

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

où $X(z)$ et $Y(z)$ désignent respectivement la transformée en z de l'entrée $x(n)$ et de la sortie $y(n)$. En mettant $H(z)$ sous la forme :

$$H(z) = \frac{5z^{-1}}{6 - z^{-1} - z^{-2}} = \frac{5z^{-1}/6}{1 - z^{-1}/6 - z^{-2}/6}$$

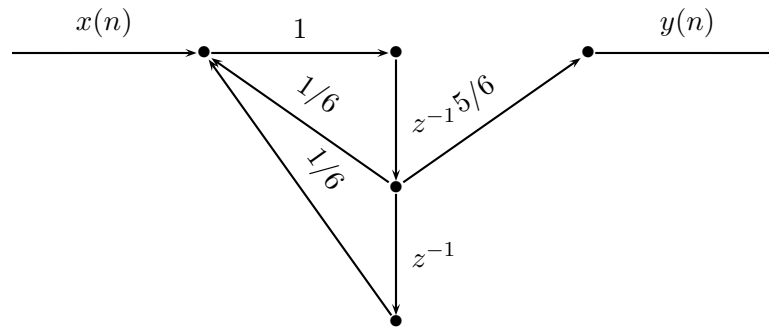
et en utilisant les propriétés de la transformée en z , on obtient :

$$y(n) = y(n-1)/6 + y(n-2)/6 + 5x(n-1)/6$$

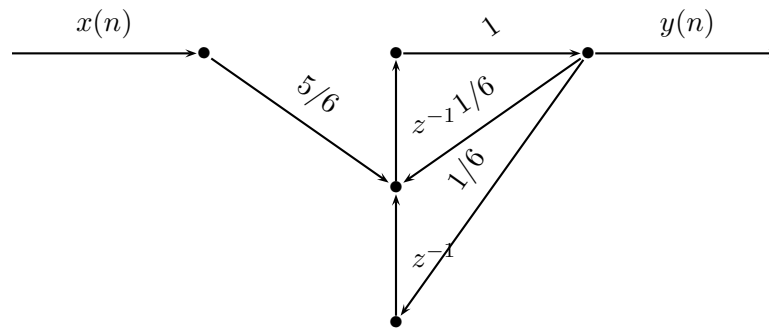
Les structures comportant un nombre minimum d'éléments de retard sont celles de forme n° 2. Une représentation des deux structures possibles (directe et transposée) est donnée à la figure 1.

1-3. Pour obtenir l'expression de la réponse impulsionnelle $h(n)$ du filtre, il suffit de trouver la transformée en z inverse de $H(z)$. En décomposant $H(z)$ en éléments simples fonctions de z^{-1} , on obtient :

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{2}{2 - z^{-1}} - \frac{3}{3 + z^{-1}} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}/2} - \frac{1}{1 + z^{-1}/3} \end{aligned}$$



Structure du filtre, forme 2 directe



Structure du filtre, forme 2 transposée

FIG. 1 – Structures possibles du filtre $H(z)$.

Compte tenu de la région de convergence de $H(z)$, on en déduit immédiatement que

$$h(n) = \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{(-3)^n} \right) u(n)$$

Problème 2 Filtre H_1 (6 points)

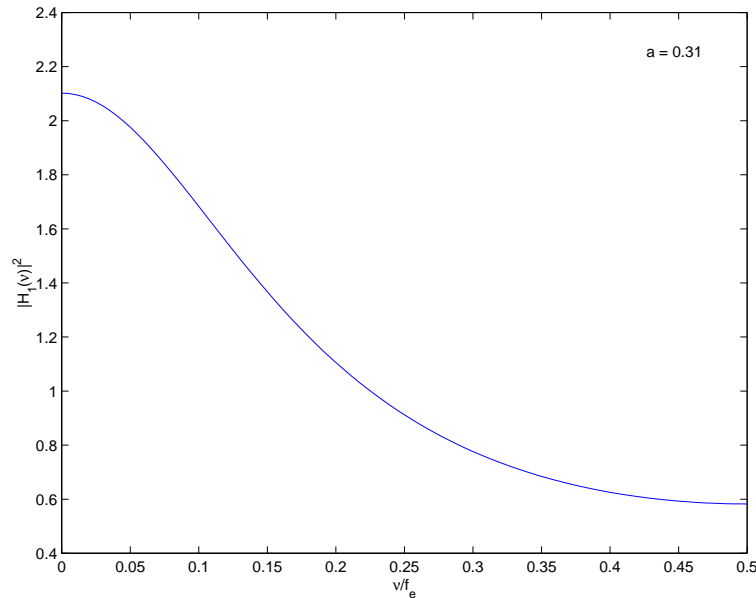
- 2-1. En utilisant les propriétés du décalage de la transformée en z , on trouve la relation entre $Y(z)$ et $X(z)$:

$$\begin{aligned} Y(z) &= az^{-1}Y(z) + X(z) \\ H_1(z) &= \frac{1}{1 - az^{-1}} \\ H_1(z) &= \frac{z}{z - a} \end{aligned}$$

La fonction de transfert $H_1(z)$ a un pôle en $a > 0$. La région de convergence est donc $\{z/|z| < a\}$ ou bien $\{z/|z| > a\}$. Le filtre étant causal, sa région de convergence doit être une couronne extérieure. Donc nécessairement :

$$\mathcal{R}_1 = \{z/|z| > a\}.$$

Le filtre sera réalisable à condition que le cercle unité soit dans la zone de convergence. Ce qui sera possible si et seulement si $a < 1$.

FIG. 2 – Spectre d'énergie de H_1

2-2. En fréquence réduite, la réponse en fréquence est donnée par :

$$H_1(\nu_r) = H_1(z)|_{z=e^{2i\pi\nu_r}} = \frac{1}{1 - ae^{-2i\pi\nu_r}}.$$

Le spectre d'énergie a donc pour expression :

$$\begin{aligned} |H_1(\nu_r)|^2 &= \frac{1}{|1 - ae^{-2i\pi\nu_r}|^2}, \\ &= \frac{1}{(1 - ae^{-2i\pi\nu_r})(1 - ae^{-2i\pi\nu_r})^*}, \\ &= \frac{1}{(1 - ae^{-2i\pi\nu_r})(1 - ae^{2i\pi\nu_r})}, \\ &= \frac{1}{1 + a^2 - 2a \cos(2\pi\nu_r)}. \end{aligned}$$

2-3. Le pic du spectre d'énergie est en $\nu_r = 0$ et a pour valeur $\frac{1}{(1-a)^2}$. On cherche donc ν_c de manière à ce que :

$$|H(\nu_c)|^2 = \frac{1}{a^2 + 1 - 2a \cos(2\pi\nu_c)} = \frac{1}{2(1-a)^2}.$$

Quelques manipulations algébriques donnent :

$$\begin{aligned} a^2 + 1 - 2a \cos(2\pi\nu_c) &= 2 - 4a + 2a^2 \\ a^2 + a(2 \cos(2\pi\nu_c) - 4) + 1 &= 0. \\ a^2 - 3.5331a + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Les racines de ce trinôme du second degré en a sont $\{3.22, 0.31\}$. Puisque l'on cherche a entre 0 et 1, on retient :

$$a = 0.31$$

2-4. Le signal d'entrée $x_a(t)$ satisfait bien aux conditions du théorème d'échantillonnage. On aura donc ($H_1(\nu_r)$ est toujours la réponse en fréquence réduite) :

$$Y_a(\nu) = H_1(\nu/f_e)X_a(\nu).$$

Ce qui se traduit dans le temps par :

$$y_a(t) = X_0|H_1(\nu_0/f_e)|\cos(2\pi\nu_0t + \arg H_1(\nu_0/f_e)) + X_1|H_1(\nu_1/f_e)|\cos(2\pi\nu_1t + \arg H_1(\nu_1/f_e)) \\ + X_2|H_1(\nu_2/f_e)|\cos(2\pi\nu_2t + \arg H_1(\nu_2/f_e)).$$

On obtient ainsi :

$$Y_0 = X_0|H_1(\nu_0/f_e)| = 1.42V, \\ Y_1 = X_1|H_1(\nu_1/f_e)| = 1.32V, \\ Y_2 = X_2|H_2(\nu_2/f_e)| = 0.39V,$$

2-5. On évalue directement les deux rapports signal sur bruit :

$$SNR_x = 8 \text{ (21dB)}, \\ SNR_y = 25 \text{ (32dB)}.$$

On augmente bien la qualité du signal d'un ratio de 3, mais l'amplitude du bruit reste toujours conséquente.

Problème 3 Filtre H_2 (5 points)

3-1. On va exprimer d'abord bande passante et bande de rejet de H_2 en terme de fréquences réduites :

$$f_c^{num} = f_c^{phys}/f_e = 3.4/16 = 0.21, \\ f_{rejet}^{num} = f_{rejet}^{phys}/f_e = 7/16 = 0.44,$$

La transformation bilinéaire transforme les fréquences numériques réduites en fréquences analogiques suivant la formule :

$$f^a = \frac{1}{\pi} \tan(\pi f^{num})$$

Appliquant cette formule, on en déduit le gabarit de H_a :

- Gain maximal 0 dB,
- Bande passante $[0, 0.25]$,
- Fluctuations dans la bande passante : 2 dB,
- Bande de rejet $[1.67, +\infty[$,

– Atténuation d'au moins 10 dB dans la bande de rejet.

3-2. On utilise l'abaque avec les paramètres suivants pour déterminer l'ordre N et le ϵ du filtre :

$$\begin{aligned} A_{PB} &= 2 \text{ dB}, \\ A_{\Omega} &= 10 \text{ dB}, \\ \Omega &= 1.67/0.25 = 6.68. \end{aligned}$$

On obtient $N = 1$ et $\epsilon = 0.7647831$. Le filtre de Chebyshev correspondant et de fréquence de coupure 1 rad.s^{-1} aura pour fonction de transfert :

$$H_0(s) = \frac{1.3076}{s + 1.3076}.$$

On dénormalise pour obtenir le filtre de Chebyshev analogique de fréquence de coupure 0.25 :

$$\begin{aligned} H_a(s) &= H_0\left(\frac{s}{2 \cdot 0.25\pi}\right), \\ &= H_0(0.6366s), \\ &= \frac{1.3076}{0.6366s + 1.3076}. \end{aligned}$$

La transformation bilinéaire donne la fonction de transfert $H_2(z)$:

$$H_2(z) = H_a(s)\Big|_{s=2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}.$$

D'où :

$$H_2(z) = \frac{1.3076}{0.6366 \times 2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1.3076}.$$

Expression qui peut bien s'écrire sous la forme annoncée :

$$H_2(z) = \frac{B_0 + B_1z^{-1}}{1 - A_1z^{-1}}.$$

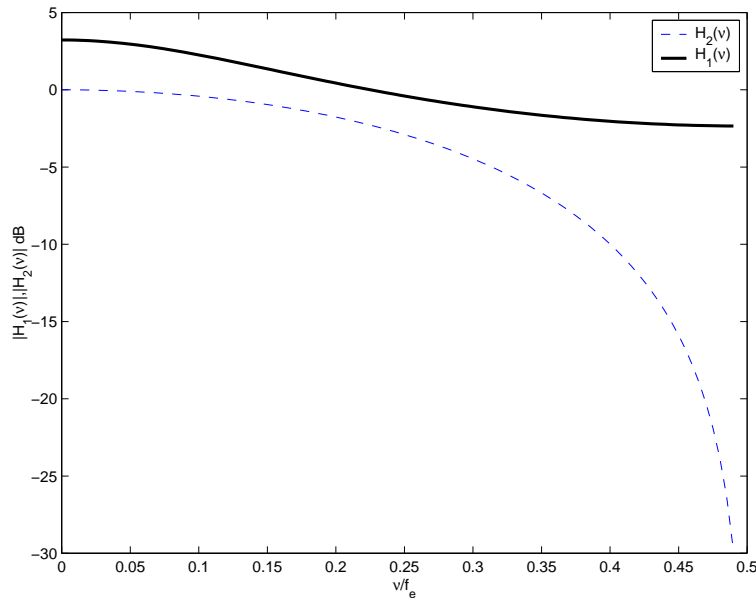
On montre (mais ce n'était pas obligatoire!) :

$$\begin{aligned} B_0 &= 0.5067, \\ B_1 &= 0.5067, \\ A_1 &= -0.0133. \end{aligned}$$

3-3. L'expression de la fonction de transfert donne :

$$\begin{aligned} Y(z) - A_1Y(z)z^{-1} &= B_0X(z) + B_1z^{-1}X(z), \\ y_n - A_1y_{n-1} &= B_0x_n + B_1x_{n-1}, \\ y_n &= B_0x_n + B_1x_{n-1} + A_1y_{n-1}. \end{aligned}$$

Calculer y_n requiert donc 3 multiplications et 2 additions. Pour que le processeur puisse calculer y_n entre deux incréments de temps, sa vitesse de calcul doit être au moins de $5/T_e = 5f_e = 80000$ opérations par seconde, soit 0.08 MFLOPS.

FIG. 3 – Comparaison des spectres d'énergie de H_1 et H_2 **Problème 4 (4 points)**

- 4-1. D'après les notes de cours, $G(\nu)$ est un filtre passe-bas idéal de bande passante $[-\nu_e/2, \nu_e/2]$ et de gain $T_e = 1/\nu_e$. On a donc :

$$G(\nu) = T_e(u(\nu + \nu_e/2) - u(\nu - \nu_e/2))$$

- 4-2. En raison des caractéristiques du filtre de reconstruction $G(\nu)$, le signal reconstruit est nécessairement à bande limitée à l'intervalle $[-\nu_e/2, \nu_e/2]$. Par conséquent, tout signal ayant des composantes fréquentielles de module plus grand que $\nu_e/2$ est nécessairement un signal d'entrée. Les tracés n^{os} 3, 5 et 7 correspondent donc à des signaux d'entrée. Il en résulte que l'un des signaux d'entrée est à bande limitée à l'intervalle $[-\nu_e/2, \nu_e/2]$ et satisfait donc les conditions du théorème d'échantillonnage. Le signal reconstruit est alors identique au signal d'entrée. Seuls deux tracés (n^{os} 4 et 8) vérifient cette propriété et ces deux tracés correspondent donc à une paire entrée-sortie. Il reste donc à apparier les entrées restantes (n^{os} 3, 5 et 7) avec les sorties restantes (n^{os} 1, 2 et 6). Or on sait que l'échantillonnage à la fréquence ν_e correspond dans le domaine des fréquences à une périodisation à la période ν_e et à une mise à l'échelle par un facteur ν_e . En effectuant l'opération de périodisation sur le tracé n^o 3, on obtient une fonction constante qui, une fois filtrée par $G(\nu)$, fournit le diagramme du tracé n^o 6. De même, lors de la périodisation, les impulsions négatives du tracé n^o 5 vont se compenser partiellement avec les impulsions positives et donner, après filtrage par $G(\nu)$, le tracé n^o 1. Enfin, on vérifie que lors de la périodisation, la deuxième et la quatrième impulsion du tracé n^o 7 s'annulent alors que la première et la troisième impulsion s'additionnent, fournissant ainsi le diagramme du tracé n^o 2 après filtrage par $G(\nu)$. On a donc les correspondances suivantes :

Entrée	Sortie
Tracé n° 3	Tracé n° 6
Tracé n° 4	Tracé n° 8
Tracé n° 5	Tracé n° 1
Tracé n° 7	Tracé n° 2