École Polytechnique de Montréal
Département de génie électrique
ELE3700 — Analyse des signaux

Corrigé de l'examen final

Yves Goussard — yves.goussard@polymtl.ca
Benoit Hamelin — benoit@benoithamelin.com

Hiver 2005

1 Vrai ou faux, et pourquoi ? (4,5 points)

Question 1-1 — VRAI Par définition, les tables standard de synthèse des filtres de Butterworth sont conçues pour construire des filtres causaux.

Question 1-2 — FAUX La superposition des trois sinusoïdes a un spectre constitué de trois paires de raies. La paire de fréquence la plus haute, $[-50, 50]$ Hz, définit la bande du signal. La fréquence de Nyquist est donc égale à 2×50 Hz, à laquelle la fréquence d'échantillonnage choisie (85 Hz) est inférieure.

Question 1-3 — VRAI Un filtre stable constitue un signal d'énergie. Par conséquent, sa puissance moyenne est nulle.

Question 1-4 — FAUX La fonction de transfert du filtre est

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - 3z^{-1}}.$$

L'unique pôle du filtre est donc

$$\begin{aligned} 1 - 3z^{-1} &= 0 \\ \frac{3}{z} &= 1 \\ z &= 3. \end{aligned}$$

Comme le filtre est causal, la région de convergence est donc $|z| > 3$. Cette région n'inclut pas le cercle unitaire, aussi la condition de non-existence de la réponse fréquentielle est satisfaite.

Question 1-5 — FAUX Si on *fftshifte* le spectre, on se retrouve avec un spectre discret asymétrique : toutes les fréquences positives sont atténuées, alors que les hautes fréquences négatives ne le sont pas. Un passe-haut doit éviter d'atténuer autant les hautes fréquences positives que les hautes fréquences négatives. Le filtre dont le spectre est donné n'est donc pas un passe-haut.

Question 1-6 — FAUX $x(t)$ étant à bande limitée et étant échantillonné en respectant le théorème de Shannon, il est possible de retrouver $X(\nu)$ à partir de tous ses échantillons $x(nT_e), n \in \mathbb{Z}$. Ces échantillons sont nécessairement différents de $x(nT_e), 0 \leq n \leq N-1$ complété par bourrage de zéros, car comme $x(t)$ est à bande limitée, son support est nécessairement égal à $\mathbb{R}$ tout entier. Cependant, la technique de bourrage de zéros permet de s'approcher autant qu'on le désire de la transformée de Fourier à temps discret de $y(t) = x_e(t)[u(t) - u(t - Nt_e)]$.

2 Filtres FIR et transformée de Fourier discrète (2,5 points)

Question 2-1 On détermine d'abord la fréquence discrète k qui permet un gain de 20 dB, ce qui correspond à un gain multiplicatif de 10. L'amplitude des éléments d'un spectre discret est, par convention, dilatée par le nombre N d'échantillons, aussi on recherche un élément du spectre associé à une raie d'amplitude $10 \times 14 = 140$. C'est uniquement la fréquence $k = 4$ qui convient.

On peut tracer un lien entre les fréquences réduites et la fréquence d'échantillonnage, de même qu'entre les fréquences discrètes et les fréquences réduites :

$$\begin{aligned} \frac{f_e/2}{f} &= \frac{1/2}{k/N} && (1) \\ f_e(k) &= \frac{fN}{k} && (2) \\ \Rightarrow f_e(4) &= \frac{50 \times 14}{4} && (3) \\ &= 175 \text{ Hz.} && (4) \end{aligned}$$

Si le signal est limité en fréquences à la bande $[-60, 60]$ Hz, la fréquence de Nyquist est égale à $f_\mathrm{N} = 2 \times 60 = 120$ Hz. Ainsi, la valeur de f_e trouvée satisfait les conditions du théorème d'échantillonnage. L'ensemble des fréquences d'échantillonnage demandé consiste donc en $\{175\}$ Hz.

Barême : on accorde tous les points pour un résultat correct. Sinon, on accorde 0,25 point pour l'identification de la fréquence $k = 4$, puis jusqu'à 0,5 point pour les étapes d'une démarche bien guidée liant les fréquences physiques aux fréquences réduites et discrètes par une règle de 3.

Question 2-2 L'atténuation complète correspond à un gain multiplicatif nul ; cela est réalisé en $k \in \{1, 3, 5, 6\}$. Par l'équation (2), on étudie ces fréquences discrètes :

$$\begin{aligned}
f_e(1) &= \frac{40 \times 14}{1} = 560 \text{ Hz} > f_{\mathrm{N}} \\
f_e(3) &= \frac{40 \times 14}{3} = 186{,}\overline{6} \text{ Hz} > f_{\mathrm{N}} \\
f_e(5) &= \frac{40 \times 14}{5} = 112 \text{ Hz} < f_{\mathrm{N}} \\
f_e(6) &= \frac{40 \times 14}{6} = 93{,}\overline{3} \text{ Hz} < f_{\mathrm{N}}.
\end{aligned}$$

L'ensemble des fréquences qui solutionnent le problème est $\{560, 186{,}\overline{6}\}$ Hz.

Barême : comme en 2-1. 0,5 point est accordé pour l'identification des fréquences pour l'atténuation complète ; 0,5 point de plus est accordé pour la mise en oeuvre des règles de trois. Le dernier demi-point n'est accordé que pour un bon filtrage des fréquences ayant égard au théorème d'échantillonnage.

3 Échantillonnage et reconstruction (5 points)

Question 3-1 On observe que, parmi les cinq transformées de Fourier, trois ont des supports qui s'étendent au delà de 2 Hz. Les signaux correspondants ne peuvent être obtenus en sortie du filtre $G_1(\nu)$, qui coupe les fréquences supérieures à 2 Hz. On a donc les correspondances suivantes, où D_j , $1 \leq j \leq 5$ désigne le j^{e} diagramme :

$$\begin{aligned}
\{D_2, D_4, D_5\} &\longleftrightarrow \{X(\nu), Y_2(\nu), Y_4(\nu)\}\,, \\
\{D_1, D_3\} &\longleftrightarrow \{Y_1(\nu), Y_3(\nu)\}\,.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on remarque que les signaux correspondant aux diagrammes 2, 4 et 5 sont tous à bande limitée $[-4,\ 4]$ Hz, la fréquence maximale comprise dans le signal étant supérieure à 2 Hz. L'un de ces signaux est nécessairement l'entrée du système et vérifie le théorème d'échantillonnage pour la configuration 4. La sortie ce cette configuration sera alors identique à l'entrée, ce qui permet de mettre en correspondance les diagrammes 2 et 5 avec $X(\nu)$ et $Y_4(\nu)$. Il en découle que le diagramme 4 correspond à $Y_2(\nu)$, ce que l'on vérifie bien en périodisant $X(\nu)$ à la période 4 Hz, puis en appliquant au résultat un filtrage passe-bas avec un fréquence de coupure de 4 Hz.

Compte tenu de ce qui précède, la périodisation de $X(\nu)$ à la période 8 Hz (échantillonneur 2) ne conduit à aucun recouvrement spectral ; le filtrage passe-bas avec une fréquence de coupure de 2 Hz reviendra donc à prélever la partie basse fréquence de $X(\nu)$ et à appliquer la mise à l'échelle adéquate, ce qui correspond au diagramme 1. Par ailleurs, on vérifie bien que la périodisation de $X(\nu)$ à la période 4 Hz, puis le filtrage passe-bas du résultat avec un fréquence de coupure de 2 Hz conduit bien au diagramme 3. Ceci permet de mettre en correspondance D_1 avec $Y_3(\nu)$ et D_3 avec $Y_1(\nu)$. On a donc finalement :

$$\begin{aligned} D_1 &\longleftrightarrow Y_3(\nu)\,, \\ \{D_2, D_5\} &\longleftrightarrow \{X(\nu), Y_4(\nu)\}\,, \\ D_3 &\longleftrightarrow Y_1(\nu)\,, \\ D_4 &\longleftrightarrow Y_2(\nu)\,, \end{aligned}$$

Question 3-2 D'après le théorème de Shannon, c'est la configuration 4 qui convient.

4 Transformée en z et inversion (4 points)

Question 4-1 Identifions d'abord les pôles de $H(z)$:

$$4z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{4} \tag{5}$$

$$2z - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{3}{2} \tag{6}$$

$$4z - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{3}{4} \tag{7}$$

Ces pôles définissent trois frontières circulaires entre lesquelles la transformée en z peut converger, d'où quatre régions possibles :

1. $|z| < \frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{4} < |z| < \frac{3}{4}$
3. $\frac{3}{4} < |z| < \frac{3}{2}$
4. $|z| > \frac{3}{2}$

Barême : on accorde 0,25 par région identifiée.

Question 4-2 La région 3 donnée en solution à la question (a).

Question 4-3 La région 4 donnée en solution à la question (a).

Question 4-4 Facilement, on représente $H(z)$ en une somme de termes ayant un facteur linéaire au dénominateur.

$$H(z) = \frac{1}{4z-1} + \frac{-1}{2z-3} + \frac{2}{4z-3} \tag{8}$$

Examinons chacun de ces termes en contexte de la région de convergence choisie, soit $\frac{3}{4} < |z| < \frac{3}{2}$.

Terme $H_1(z) = \frac{1}{4z-1}$ Comme le pôle associé est inférieur à la frontière interne de l'anneau de convergence, ce terme est associé à une sous-région de convergence en forme de plan perforé. La composante du signal associée à ce terme de la fonction de transfert est donc une séquence de droite. On reconstitue donc la progression géométrique en z^{-1} qui a résulté en ce terme.

$$\begin{aligned}
H_1(z) &= \frac{1}{4z-1} && (9)\\
&= \frac{4^{-1}z^{-1}}{1-4^{-1}z^{-1}} && (10)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}z^{-n} && (11)\\
\Rightarrow h_1(n) &= 4^{-n}u(n-1) && (12)
\end{aligned}$$

Terme $H_2(z) = \frac{-1}{2z-3}$ Le pôle associé constitue la frontière externe de l'anneau de convergence. Ce terme est donc associé à une sous-région de convergence en forme de disque. La composante du signal qui l'a engendré consiste ainsi en une séquence à gauche. On reconstitue donc une progression géométrique en z.

$$\begin{aligned}
H_2(z) &= \frac{-1}{2z-3} && (13)\\
&= \frac{1}{3-2z} && (14)\\
&= \frac{1/3}{1-\frac{2}{3}z} && (15)\\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n z^n && (16)\\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{3}{2}\right)^n z^{-n} && (17)\\
\Rightarrow h_2(n) &= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n u(-n) && (18)
\end{aligned}$$

Terme $H_3(z) = \frac{2}{4z-3}$ Le pôle de ce terme constitue la frontière interne de l'anneau de convergence. Aussi, ce terme est associé à une sous-région de convergence en forme de plan perforé. La composante du signal qui l'a engendré consiste de ce fait en une séquence à droite. On reconstitue donc une progression géométrique en z^{-1}.

$$
\begin{aligned}
H_3(z) &= \frac{2}{4z-3} && (19)\\
&= \frac{1/2z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} && (20)\\
&= \frac{2}{3} \times \frac{\frac{3}{4}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} && (21)\\
&= \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n z^{-n} && (22)\\
\Rightarrow h_3(n) &= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n-1) && (23)
\end{aligned}
$$

Regroupement On rassemble les trois composantes du signal et on obtient finalement :

$$
h(n) = \left[4^{-n} + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] u(n-1) + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n u(-n) \qquad (24)
$$

Barême : on accorde 0,5 point pour l'inversion correcte de chacun des termes $H_1(z)$, $H_2(z)$ et $H_3(z)$ et 0,5 point pour le rassemblement en la réponse impulsionnelle $h(n)$. L'expression de cette dernière dépend des manipulations algébriques réalisées pour l'inversion de chacun des termes. Il ne faut donc pas systématiquement marquer un résultat comme erroné aussitôt qu'il diffère de l'équation (24). Il faut plutôt retracer l'expression des solutions et des calculs et accorder les points si les résultats sont sensibles.

5 Synthèse d'un filtre numérique (4 points)

Question 5-1 La fréquence de coupure numérique est évidemment $f_d^c = 21$ kHz. On en déduit la fréquence de coupure analogique, qu'on convertit en pulsations.

$$
\begin{aligned}
f_a^c &= \frac{44100}{\pi}\tan\frac{21\pi}{44{,}1} && (25)\\
&\approx 1{,}87 \times 10^5 && (26)\\
\omega_a^c &= 2\pi f_a^c && (27)\\
&\approx 2\pi \times 1{,}87 \times 10^5 \approx 1{,}18 \times 10^6 && (28)
\end{aligned}
$$

Barême : tous les points sont accordés pour le bon résultat pour ω_a^c. Sinon, 0,25 point est donné pour le choix de f_d^c, 0,5 point est donné pour la transformation de f_d^c à f_a^c et 0,25 est associé à l'obtention de ω_a^c.

Question 5-2 On peut identifier rapidement les deux premiers paramètres demandés. D'une part, comme le gain maximal dans la bande est 0 dB, on obtient $H_0 = 1$. D'autre part, comme l'atténuation exigée à la coupure est de 3 dB, il s'agit d'un filtre de Chebyshev standard et $\epsilon = 1$.

Pour réaliser le calcul de l'ordre, on obtient d'abord la pulsation normalisée correspondant à la fréquence numérique où l'atténuation est spécifiée.

$$\begin{aligned}
\omega_a &= 2 \times 44100 \tan \frac{21{,}1\pi}{44{,}1} && (29)\\
&\approx 1{,}30 \times 10^6 && (30)\\
\overline{\omega_a} &= \frac{\omega_a}{\omega_a^c} && (31)\\
&\approx \frac{1{,}30}{1{,}18} && (32)\\
&\approx 1{,}10. && (33)
\end{aligned}$$

On peut maintenant déterminer l'ordre en comparant le gain maximal dans la bande à l'atténuation à $\overline{\omega_a}$:

$$\begin{aligned}
10 \log_{10} \frac{1}{1 + C_n^2(1{,}10)} &\leq -40 && (34)\\
\frac{1}{1 + C_n^2(1{,}10)} &\leq 10^{-4} && (35)\\
C_n^2(1{,}10) &\geq 9999 && (36)\\
\cosh n \operatorname{arccosh} 1{,}10 &\geq \sqrt{9999} && (37)\\
n &\geq \frac{\operatorname{arccosh} \sqrt{9999}}{\operatorname{arccosh} 1{,}10} && (38)\\
&\approx 11{,}9. && (39)
\end{aligned}$$

On fixe donc $n = 12$.

Barême : on accorde 0,25 point pour chacun des paramètres ϵ et H_0. 0,5 point est donné pour la conversion de f_d en $\overline{\omega_a}$. 0,5 point est donné, finalement, pour la bonne valeur fixée pour l'ordre du filtre.

Question 5-3 On dénormalise d'abord le filtre analogique, obtenant une fonction de transfert intermédiaire :

$$H_B(s) = \overline{H_B}\left(\frac{s}{1{,}18 \times 10^6}\right). \quad (40)$$

On complète ensuite la transformation bilinéaire sur le filtre dénormalisé.

$$\begin{aligned} H(z) &= H_B\left(2\times 44100\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) && (41)\\ &= \overline{H_B}\left(\frac{1}{\tan\frac{21\pi}{44{,}1}}\times\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) && (42)\\ &\approx \overline{H_B}\left(0{,}0749\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) && (43)\end{aligned}$$

Barême : tous les points sont accordés pour un résultat identique à l'équation (43). Sinon, on donne 0,5 point pour la dénormalisation, puis 0,75 point pour la transformation bilinéaire résultant en une expression correcte de $H(z)$. Le quart de point final est accordé à un résultat simplifié ayant égard à la dénormalisation et à la transformation bilinéaire (équation 43).

BONI — Invariance à l'impulsion et repliement spectral

En échantillonnant la réponse impulsionnelle du filtre analogique à la fréquence normalisée $\overline{\omega_e} = 4$, on fait en sorte que le spectre du filtre numérique — ainsi que son spectre d'énergie — soit périodique et de période 4. Ainsi, l'énergie à l'origine du filtre numérique vient de la contribution unitaire de la période à l'origine, plus les périodes environnantes. Formellement,

$$E_0 = |H(0)|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}|H(4k)|^2. \tag{44}$$

Compilons donc les termes de cette sommation jusqu'à parvenir à un terme non significatif.

$$\begin{aligned} |H(4)|^2 &= \frac{1}{1+4^4} \approx 3{,}89\times 10^{-3} && (45)\\ |H(8)|^2 &= \frac{1}{1+8^4} \approx 2{,}44\times 10^{-4} && (46)\\ |H(12)|^2 &= \frac{1}{1+12^4} \approx 4{,}82\times 10^{-5} && (47)\\ &\stackrel{\text{def}}{=} 0 && (48)\end{aligned}$$

Ainsi, $E_0 \approx 1{,}004134$, d'où

$$\frac{|H_d(0)|^2}{|H_a(0)|^2} = \frac{1{,}004134}{1} = 1{,}004134. \tag{49}$$

La quantité intéressante pour juger de la significativité de ce gain est la différence relative :

$$\frac{1{,}004134 - 1}{1{,}004134} \approx 0{,}004. \tag{50}$$

À la fréquence choisie, le repliement spectral modifie le gain par moins de 0,5 %. On juge donc que son effet est négligeable.

Barême : un point est accordé pour voir et exprimer formellement le lien entre l'énergie à l'origine et le repliement du spectre d'énergie du filtre analogique. 0,5 point est accordé pour la compilation du rapport d'énergie. Finalement, 0,5 point est donné pour une justification solide de l'affirmation de significativité ou de non-significativité de l'impact du repliement spectral.