Problème 1 : Auget mobile (6 points)

Un jet d'eau, ayant une vitesse V_1 frappe un auget à une hauteur y_1 comme indiqué sur la figure 1. On considère que le jet incident a un diamètre D et que l'auget possède une vitesse de translation constante U_t selon l'axe $\vec{x}$. Enfin, le fluide sort de l'auget à une hauteur y_2 en faisant un angle θ avec l'axe $\vec{y}$.

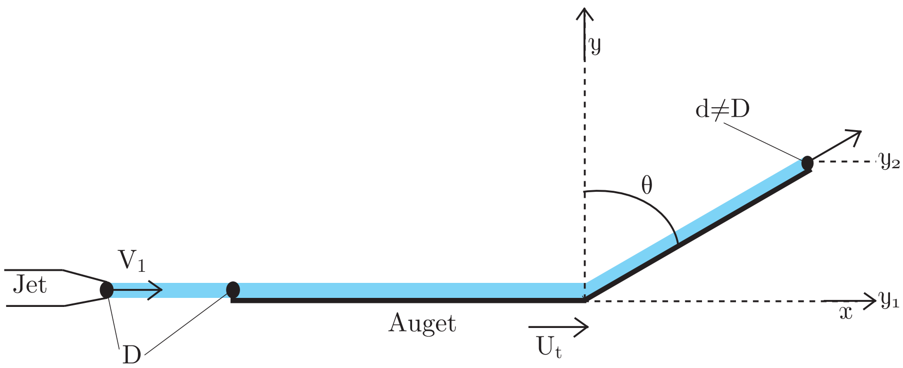

FIG. 1 – Problème 1 : auget mobile.

Grâce à la théorie linéaire :

a) Après avoir fixé un volume de contrôle et un repère, déterminer la puissance P donnée par le fluide à l'auget en fonction des paramètres du problème (expression analytique) : $V_1, U_t, \theta, \rho, D$ et de la vitesse relative en sortie V_{r_2}. ***(3 pts)***

b) Exprimer de manière analytique V_{r_2} en fonction de y_1, y_2, g, U_t et V_1. ***(2 pt)***

c) Déterminer numériquement la puissance reçue par l'auget avec les valeurs suivantes : ***(1 pt)***

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
V_1 & = & 2m/s \\
D & = & 2cm \\
y_1 & = & 0m \\
\theta & = & 30° \\
y_2 & = & 0.1m \\
U_t & = & 0.5m/s \\
\rho & = & 1000kg/m^3 \\
g & = & 9.8m/s
\end{array}
\right.
$$

Note 1 : on négligera les termes de friction sur l'auget MAIS le diamètre du jet n'est pas constant sur l'auget.

Note 2 : on exprimera les puissances en Watts avec une precision de 10^{-3}.

CORRECTION

a)

On prend comme **volume de contrôle** l'auget en translation. Ce volume de contrôle est donc en translation avec une vitesse $U_t \vec{x}$. La **puissance** donnée par le fluide à l'auget s'écrit :

$$\begin{aligned} P = \vec{F}_{fluide->auget} \cdot \vec{U_t} &= F^x_{fluide->auget} U_t \\ &= -F^x_{auget->fluide} U_t \\ &= -F_x U_t \qquad (*) \end{aligned}$$

Il faut donc déterminer les forces subies par le fluide F_x selon la direction $\vec{x}$. Pour ce faire, on utilise la conservation de la **quantité de mouvement linéaire** (I.8bis) pour 1 entrée - 1 sortie unidimensionnelle, projetée sur $\vec{x}$, dans le repère de l'auget en translation :

$$\begin{aligned} F_x = \vec{F} \cdot \vec{x} &= \dot{m} \left[\vec{V_{r_2}} \cdot \vec{x} - \vec{V_{r_1}} \cdot \vec{x} \right] \\ &= \dot{m} \left[V_{r_2} \sin(\theta) - V_{r_1} \right] \\ &= \rho V_{r_1} A_1 \left[V_{r_2} \sin(\theta) - V_{r_1} \right] \\ &= \rho (V_1 - U_t) A_1 \left[V_{r_2} \sin(\theta) - (V_1 - U_t) \right] \qquad \text{car } U_t, V_1 \text{ et } V_{r_1} \text{ sur } \vec{x} \\ &= \rho (V_1 - U_t) \frac{\pi D^2}{4} \left[V_{r_2} \sin(\theta) - (V_1 - U_t) \right] \end{aligned}$$

Donc on a :

$$P = -F_x U_t = -\rho U_t (V_1 - U_t) \frac{\pi D^2}{4} \left[V_{r_2} \sin(\theta) + U_t - V_1 \right] \qquad (**)$$

b)

En négligeant les termes de friction, on peut appliquer l'équation de **Bernoulli linéaire** entre l'entrée et la sortie de l'auget. Ainsi, l'équation (I.23) donne :

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_{r_1}^2}{2} + g y_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_{r_2}^2}{2} + g y_2$$

Comme $p_1 = p_2 = p_{atm}$, on obtient :

$$\frac{V_{r_1}^2}{2} + g y_1 = \frac{V_{r_2}^2}{2} + g y_2$$

$$V_{r_2} = \sqrt{V_{r_1}^2 - 2g(y_2 - y_1)}$$

$$V_{r_2} = \sqrt{(V_1 - U_t)^2 - 2g(y_2 - y_1)} \qquad (***)$$

c)

Grâce à la relation (***), on obtient :

$$V_{r_2} = \sqrt{(V_1 - U_t)^2 - 2g(y_2 - y_1)} = \sqrt{(2 - 0.5)^2 - 2 * 9.8(0.1 - 0)} = \mathbf{0.538\ m/s}$$

On injectant cette valeur dans la relation (**), on obtient :

$$\begin{aligned} P &= -\rho U_t (V_1 - U_t) \frac{\pi D^2}{4} \left[V_{r_2} \sin(\theta) + U_t - V_1\right] \\ &= -1000 * 0.5(2-0.5) \frac{\pi 0.02^2}{4} \left[0.538 \sin(30) + 0.5 - 2\right] \\ &= \mathbf{0.290\ W} \end{aligned}$$

Problème 2 : Auget flexible (3 points)

Sous l'action de l'écoulement fluide, un auget flexible va se déformer d'une longueur η comme indiquée sur la figure 2.

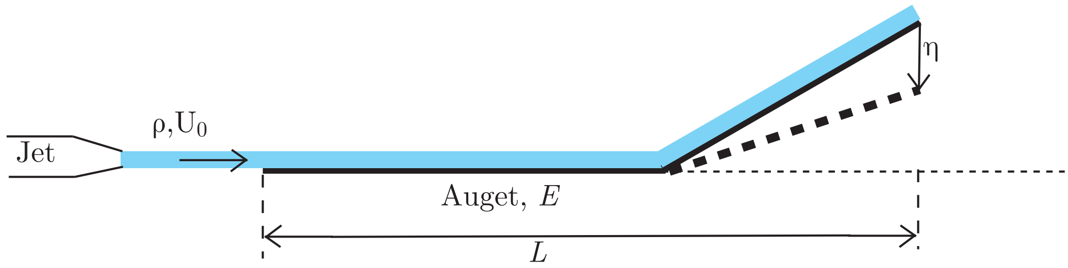

FIG. 2 – Problème 2 : auget flexible.

On suppose que la déformation η dépend de :

- L : la longueur de l'auget ;
- E : le module d'Young du matériau composant l'auget ;
- U_0 : la vitesse de l'écoulement ;
- ρ : la masse volumique du fluide.

Déterminer les nombres adimensionnels caractérisant ce problème. On utilisera le technique des exposants en prenant comme base les premières grandeurs parmi : U_0, ρ, L, η, E (par exemple, pour deux grandeurs, on prendra U_0 et ρ). On posera les équations permettant de déterminer les exposants.

<u>Note</u> : le module d'Young E a comme dimension : $[E] = ML^{-1}T^{-2}$.

CORRECTION

Analyse dimensionnelle :

$$\begin{array}{rcl} [U_0] & = & LT^{-1} \\ [\rho] & = & ML^{-3} \\ [L] & = & L \\ [\eta] & = & L \\ [E] & = & ML^{-1}T^{-2} \end{array}$$

On trouve trois paramètres dimensionnellement indépendants : U_0, ρ et L. Donc, on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} n & = & 5 \\ k & = & 3 \end{array} \right.$$

Ainsi, on doit trouver $n - k = 2$ paramètres adimensionnels. On pose alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \pi_1 & = & U_0^{a_1}\rho^{b_1}L^{c_1}\eta \\ \pi_2 & = & U_0^{a_2}\rho^{b_2}L^{c_2}E \end{array} \right.$$

Et on doit vérifier les équations suivantes :

$$\text{Pour } \pi_1 : \left\{ \begin{array}{lccccc} L: & a_1 & - & 3b_1 & +c_1 & +1 = 0 \\ M: & & & b_1 & & +0 = 0 \\ T: & -a_1 & & & & +0 = 0 \end{array} \right. \text{, pour } \pi_2 : \left\{ \begin{array}{lccccc} L: & a_2 & - & 3b_2 & +c_2 & -1 = 0 \\ M: & & & b_2 & & +1 = 0 \\ T: & -a_2 & & & & -2 = 0 \end{array} \right.$$

On trouve alors :

$$\text{Pour } \pi_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} a_1 & = & 0 \\ b_1 & = & 0 \\ c_1 & = & -1 \end{array} \right. \qquad \text{et pour } \pi_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} a_2 & = & -2 \\ b_2 & = & -1 \\ c_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \pi_1 & = & \dfrac{\eta}{L} \\ \\ \pi_2 & = & \dfrac{E}{\rho U_0^2} \end{array} \right.$$

En fait, π_2 représente l'inverse du nombre de Cauchy : $C_Y = \frac{\rho U_0^2}{E}$ qui mesure l'ordre de grandeur des déformations de la structure consécutives à la pression dynamique du fluide : ρU_0^2.

Problème 3 : Jonction en Y (6 points)

La jonction en Y de la figure (3) partage l'écoulement d'un tube en rotation en deux écoulements secondaires, avec une même débit $Q/2$, qui sortent des tubes, comme indiqué, à une distance R_0 de l'axe $\vec{x}$.

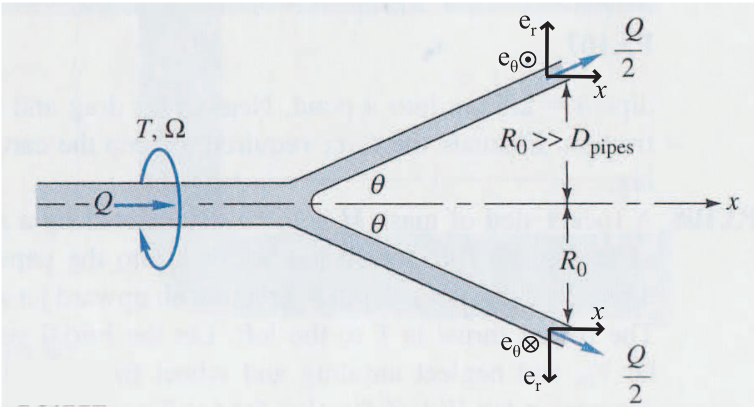

FIG. 3 – Problème 3 : jonction en Y.

On néglige les forces de gravité et de friction.

a) Déterminer les composantes de la vitesse absolues de sortie $\vec{V}$ sur $\left(\vec{x}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}\right)$ en fonction de la norme de la vitesse relative V_r, R_0, Ω et θ. (expression analytique) ***(1 pt)***

b) Le tube tournant à une vitesse angulaire Ω, déterminer la composante sur $\vec{x}$ du moment $\vec{\Gamma}$ par rapport à l'axe $\vec{x}$ exercé sur le fluide en fonction des données du problème $(\rho, Q, R_0, \Omega, \theta)$. (expressions analytiques) ***(3 pts)***

c) Calculer la puissance du moteur entraînant l'arbre en rotation à l'aide des données suivantes : ***(2 pts)***

$$\left| \begin{array}{ccl} \Omega & = & 250 rev/min \\ R_0 & = & 20 cm \\ \rho & = & 1000 kgm^{-3} \\ Q & = & 3 m^3 h^{-1} \\ \theta & = & 60° \end{array} \right.$$

<u>Note</u> : on exprimera la puissance en Watts avec une précision de 10^{-2}.

CORRECTION

a)

$$\vec{V} = \vec{V_r} + \vec{U_t} = Vr\cos\theta\ \vec{x} + Vr\sin\theta\ \vec{e_r} + \Omega R_0\ \vec{e_\theta}$$

b)

On prend comme **volume de contrôle** le système en rotation à la vitesse angulaire ω mais un **repère** fixe (et donc inertiel). La conservation de la quantité de mouvement angulaire s'exprime par l'équation (I.13) :

$$\vec{\Gamma} = \sum_{\text{sorties}} \dot{m}_s \left(\vec{r} \wedge \vec{V}\right)_s - \sum_{\text{entrées}} \dot{m}_e \left(\vec{r} \wedge \vec{V}\right)_e$$

Comme entrées, on a juste l'écoulement dans l'arbre en rotation et on peut considérer que le rayon moyen est nul. Comme sorties, on a 2 écoulements secondaires identiques avec un débit $Q/2$. On développe ainsi l'expression de $\vec{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= 2\,\dot{m}_s \left(\vec{R_0} \wedge \vec{V}\right) - 0 \\ \Gamma_x &= 2\,\dot{m}_s\, R_0^2\Omega \\ &= \rho Q R_0^2 \Omega \end{aligned}$$

c)

La puissance du moteur est le produit du couple exercé sur le fluide et de la vitesse de rotation Ω sur $-\vec{x}$, on a donc :

$$P_{moteur} = \vec{\Gamma} \cdot \Omega\ \vec{x} = \Omega\Gamma_x = \rho Q R_0^2 \Omega^2 = \mathbf{22.85W}$$

Problème 4 : Moulin à eau (5 points)

On étudie le fonctionnement d'un moulin à eau installé sur une rivière comme indiqué sur la figure 4.

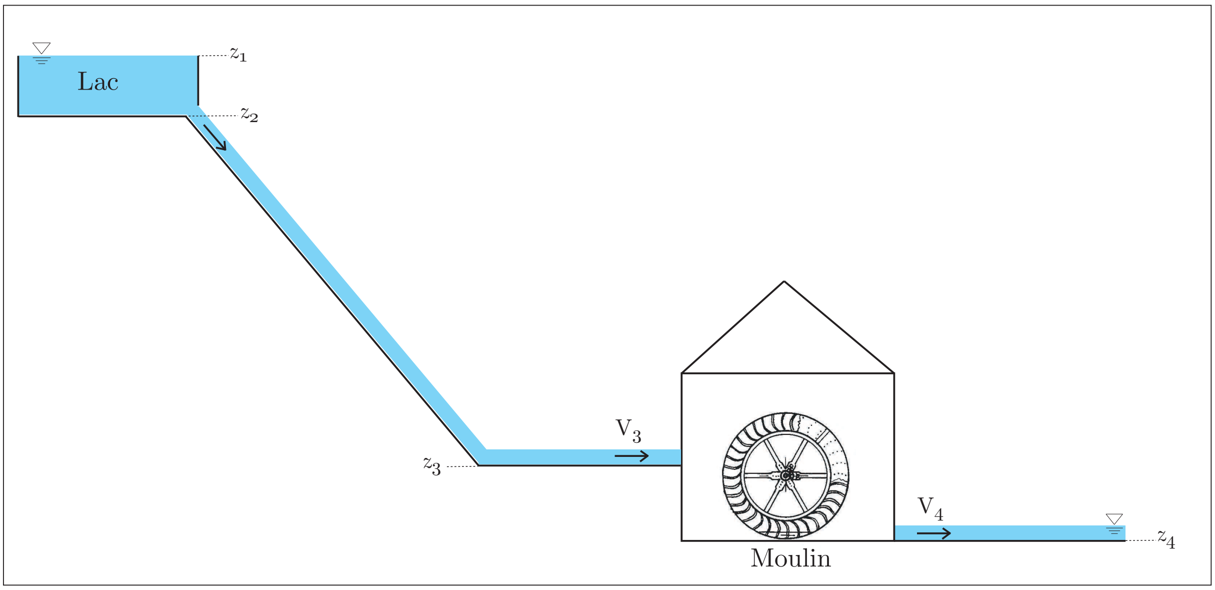

FIG. 4 – Problème 4 : moulin à eau.

L'eau provient d'un lac dont la surface est située à 600 pieds au-dessus de l'entrée du moulin et qui a une profondeur de 30 pieds. La rivière s'écoule sans frottement à pression atmosphérique jusqu'à l'entrée moulin (3) puis ressort 10 pieds plus bas sur un nouveau lit de rivière (4).

a) Calculer la vitesse V_3 du fluide à l'entrée du moulin à eau. ***(2 pts)***

b) Sachant que $V_4 = 98.285 pi/s$ et qu'on a débit $Q = 600 pi^3/s$, quelle est la puissance hydraulique de la roue à eau (en Watts) ? ***(2 pts)***

c) Au vu des résultats obtenus, que peut-on dire des hypothèses formulées dans ce problème ? ***(1 pt)***

Note : $\gamma = 62.4 lbf/pi^3$, $g = 32.2 pi/s^2$ et $1 pi.lbf/s = 1.36W$.

Fin de l'examen

CORRECTION

a)

En négligeant les termes de friction, on peut appliquer l'équation de **Bernoulli linéaire** entre la surface du lac (1) et l'entrée du moulin à eau (3) (pas d'échange de travail ou de chaleur). Ainsi, l'équation (I.23) donne :

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_3}{\rho}+\frac{V_3^2}{2}+gz_3$$

où :

$$\begin{aligned} V_1 &= 0pi/s \quad \text{surface libre} \\ p_1=p_3 &= p_{atm} \\ z_1-z_3 &= 600pi \end{aligned}$$

Donc : $V_3=\sqrt{2g(z_1-z_3)}=$ **196.57pi/s**

b)

La roue à eau provoque un échange de travail entre l'entrée et la sortie du moulin, on ne peut donc pas appliquer l'équation de Bernoulli. On va utiliser l'équation de conservation de l'énergie. Deux options s'offrent à nous dépendant si on connaît V_3 ou pas.

Option 1 : on connaît V_3.

On applique entre (3) et (4), l'équation de conservation de l'énergie (I.22) pour les écoulements incompressibles. On a alors :

$$-H_t=\frac{p_4-p_3}{\gamma}+\frac{V_4^2-V_3^2}{2g}+(z_4-z_3)+h_{f_{3-4}}$$

où :

$$\begin{aligned} V_3 &= 196.57pi/s \\ V_4 &= 98.285pi/s \\ p_3=p_4 &= p_{atm} \\ z_3-z_4 &= 10pi \\ h_{f_{3-4}} &= 0pi \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} H_t &= -\frac{V_4^2-V_3^2}{2g}+(z_3-z_4) \\ &= -\frac{(98.285)^2-(196.57)^2}{2*32.2}+10 \\ &= 460pi \end{aligned}$$

Option 2 : on ne connaît pas V_3.

On applique entre (1) et (4), l'équation de conservation de l'énergie (I.22) pour les écoulements incompressibles. On a alors :

$$-H_t = \frac{p_4 - p_1}{\gamma} + \frac{V_4^2 - V_1^2}{2g} + (z_4 - z_1) + h_{f_{1-4}}$$

où :

$$\begin{aligned} V_1 &= 0 pi/s \quad \text{surface libre} \\ V_4 &= 98.285 pi/s \\ p_1 = p_4 &= p_{atm} \\ z_1 - z_4 &= 610 pi \\ h_{f_{1-4}} &= 0 pi \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} H_t &= -\left(\frac{V_4^2}{2g} + (z_1 - z_4)\right) \\ &= -\frac{(98.285)^2}{2 * 32.2} + 610 \\ &= 460 \ pi \end{aligned}$$

Finalement, on obtient la puissance hydraulique :

$$P_w = \gamma Q H_t = 62.4 * 600 * 460 = 17\ 222\ 400 \ pi.lbf/s = \textbf{23 MW !!!!}$$

c)

On constate que la puissance hydraulique ainsi obtenue est énorme ! Pour une roue de moulin on a en effet des puissances de l'ordre du kW. Ceci est causé par la vitesse en entrée V_3 trop élevée pour être réelle. Ainsi, l'hypothèse d'une rivière sans friction (sur un parcours de plusieurs kilomètres) n'est pas du tout valable et les pertes de charge doivent absolument être prises en compte ! ! !

Fin de la correction