ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

# Questionnaire examen final

**MTR1035D**

Sigle du cours

**CORRIGÉ**

| Identification de l'étudiant(e) | | |
|---|---|---|
| **Nom :** | **Prénom :** | |
| **Signature :** | **Matricule :** | **Groupe :** |

| Réservé | |
|---|---|
| Q1 | /6 |
| Q2 | /8 |
| Q3 | /5 |
| Q4 | /6 |
| Q5 | /7 |
| Q6 | /3 |
| | /35 |

| *Sigle et titre du cours* | | *Groupe* | *Trimestre* |
|---|---|---|---|
| **MTR1035D Matériaux** | | **Tous** | **Hiver 2011** |
| *Professeur* | | *Local* | *Téléphone* |
| **Myriam Brochu** | | **A-453** | **3405** |
| *Jour* | *Date* | *Durée* | *Heures* |
| **Mercredi** | **4 mai 2011** | **1 h 45** | **13 h 30 – 15h15** |

| *Documentation* | *Calculatrice* | |
|---|---|---|
| [X] Aucune<br>[ ] Toute<br>[ ] Voir directives particulières | [ ] Aucune<br>[ ] Toutes<br>[X] Non programmable | **Les cellulaires, agendas électroniques ou téléavertisseurs sont interdits.** |

### *Directives particulières*

1. Les nombres entre parenthèses indiquent le nombre de points accordés à la question, le total est de **35** points.
2. **Pour les questions nécessitant des calculs ou une justification, aucun point ne sera accordé à la bonne réponse si le développement n'est pas écrit.**
3. Utilisez les espaces prévus ou la page opposée pour vos calculs.
4. Vous avez, en annexe, le formulaire général. Vous pouvez détacher cette page du questionnaire.

***Important***

Cet examen contient **6** questions sur un total de **13** pages.
**(ecluant cette page)**

La pondération de cet examen est de **30** %

Vous devez répondre sur : [X] le questionnaire [ ] le cahier [ ] les deux

Vous devez remettre le questionnaire : [X] oui [ ] non

**L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.**

## Question N°1 Propriétés en traction (6 points)

On réalise un essai de traction sur une éprouvette de section circulaire avec un diamètre **D** = 6 mm et une longueur calibrée $\mathbf{L_0}$ = 50 mm (voir Figure 1).

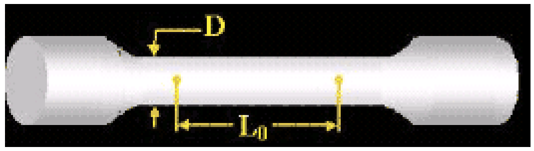



**Figure 1 : Éprouvette de traction cylindrique**

**a)** Sachant que la résistance mécanique, $\boldsymbol{R_m}$, du matériau éprouvé est de 780 MPa, déterminez la capacité minimale $\mathbf{P_{min}}$, en kN, que doit avoir la machine de traction pour réussir l'essai de traction. (1 point)

***Calculs :***

On sait que : $R_m = \frac{P_{min}}{S_o} = 780\ MPa$

où $S_o = \frac{\pi D^2}{4} = 28.27433\ mm^2$

alors : $P_{min} = S_o\, R_m = \left(\frac{\pi D^2}{4}\right) R_m = \frac{\pi (6\times10^{-3}\ m)^2 (780\times10^6\ N/_{m^2})}{4} = 22054\ N \cong 22,1\ kN$

| $\mathbf{P_{min}}$ = | 22,1 | kN |
|---|---|---|

**b)** L'essai de traction doit être effectué à une vitesse de déformation de 3 % par minute. Sachant cela, quelle doit être la vitesse de déplacement $\mathbf{v_t}$ de la traverse en mm/minute ? (1 point)

*Conseil : Faites l'hypothèse que seule la longueur calibrée se déforme et que cette déformation est homogène.*

***Calculs :***

**La vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ est de 3 %/min, c'est à-dire de 0,03/mm/mm/min alors la vitesse de déplacement de la traverse $v_t$, exprimée en mm/min sera de :**

$$v_t = \dot{\varepsilon} l_0 = \left(\frac{0,03\ mm/mm}{min}\right)(50\ mm) = 1,5\ {}^{mm}/_{min}$$

| $\mathbf{v_t}$ = | **1,5 mm/min** |
|---|---|

**c)** Après le bris de l'éprouvette, la ~~section~~ longueur calibrée mesure 57 mm. Quel est l'allongement à la rupture **A**, en %, de ce matériau ? (1 point)

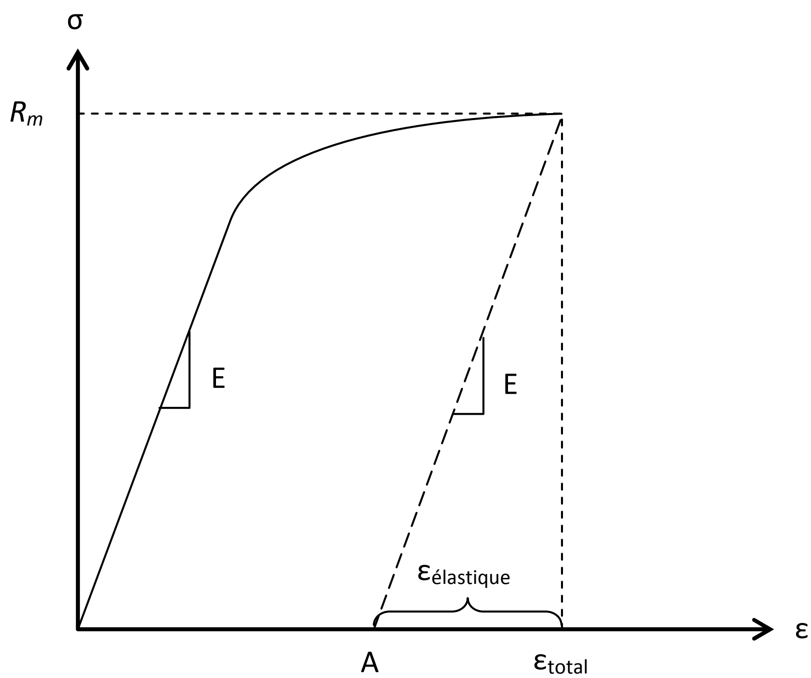
**Calculs :**

$$A\ \% = \frac{(L_f - L_o)}{L_o} \times 100 = \frac{(57\ mm - 50\ mm)}{50\ mm} \times 100 = 14\ \%$$

| **A =** | **14 %** |
|---|---|

**d)** Sachant que le module d'Young du matériau est 90 GPa et qu'il n'y a pas eu de striction lors de l'essai (rupture à $R_m$), combien mesurait la longueur calibrée $\mathbf{L_f}$, en millimètres, juste avant la rupture ? (3 points)

***Calculs :*** **Étant donné que la déformation plastique est homogène, la courbe de traction a l'allure suivante :**




**On trouve facilement que :**

$\varepsilon_{totale} = A + \varepsilon_{élastique} = A + \frac{R_m}{E}$, **mais** $\varepsilon_{totale} = \frac{\Delta L_{f,avant\ rupture}}{L_0} = \frac{L_{f,avant\ rupture} - L_0}{L_0}$. **Alors :**

$$L_{f,avant\ rupture} = L_0(1 + \varepsilon_{totale}) = L_0\left[1 + \left(A + \frac{R_m}{E}\right)\right]$$
$$= (50\ mm)\left[1 + \left(0,14 + \frac{780 \times 10^6 Pa}{90 \times 10^9 Pa}\right)\right] = 57,43\ mm$$

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbf{L_f}$ **=** | **57,43** | **mm** |

## Question N°2 Architecture atomique et glissement (8 points)

Le cuivre a une structure cristalline cubique à faces centrées (CFC). Dans cette architecture compacte, les atomes sont tangents selon les directions appartenant à la famille $\langle 110 \rangle$. Le paramètre de maille du cuivre est 0,3615 nanomètre.

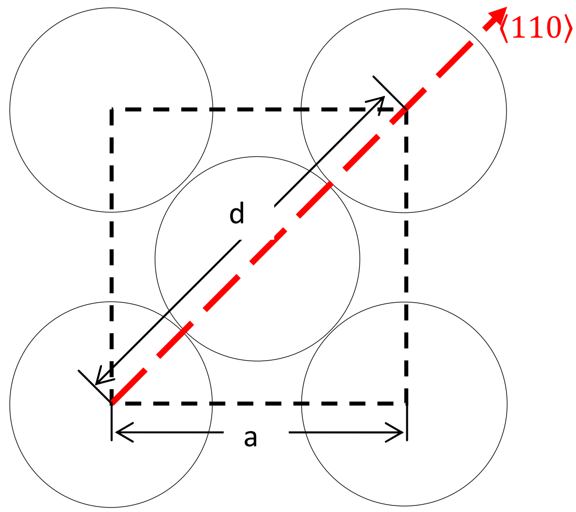
**a)** Identifiez deux directions, non parallèles, appartenant à la famille $\langle 110 \rangle$. (1 point)

| | | |
|---|---|---|
| **Direction 1 :** | | **2 directions à prendre parmi ces directions qui font partie de la famille** $\langle 110 \rangle$ **:** $[011], [0\bar{1}1], [110], [\bar{1}10], [101], [\bar{1}01],$ |
| **Direction 2 :** | | |

**b)** Calculez le rayon $\mathbf{r_{Cu}}$, en nanomètre, de l'atome de cuivre. (2 points)

***Calculs*** **:**

**Dans une maille cubique à faces centrées, les atomes, assimilés à des sphères dures, sont tangents dans les directions $\langle 110 \rangle$.**




**On a :** $d = 4r_{Cu} = \sqrt{a^2 + a^2}$.

**On en déduit que :** $r_{Cu} = \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{(0{,}3615\ nm)\sqrt{2}}{4} = 0{,}1278\ nm$

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbf{r_{Cu}}$ **=** | **0,1278** | **nm** |

**c)** Démontrez que la compacité des structures CFC est égale à 74 %. (2 points)

***Calculs (démonstration) :***

**On a 4 atomes en propre dans une maille cubique à faces centrées. Et la compacité C est :**

$$C = \frac{Volume\ des\ atomes}{Volume\ de\ la\ maille} = \frac{\left(8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2}\right) V_{sphere}}{a^3} = \frac{4\left(\frac{4}{3}\pi r_{Cu}^3\right)}{\left(2\sqrt{2}\, r_{Cu}\right)^3} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \cong 0{,}74$$

**CQFD**

**d)** Proposez un système de glissement typique pour la structure CFC. (1 point)

| | | |
|---|---|---|
| **Plan :** | **(111)** | **Ou un autre plan de la famille {111}.** |
| **Direction :** | $[\bar{1}10]$ | **Ou une autre direction de la famille$\langle 110\rangle$ dont le produit saclaire avec la normale au plan choisi est nul.** |

**e)** Dans une structure cristalline quelconque, quel est le nom du défaut linéaire (1 dimension) qui facilite le glissement cristallographique ? (1 point)

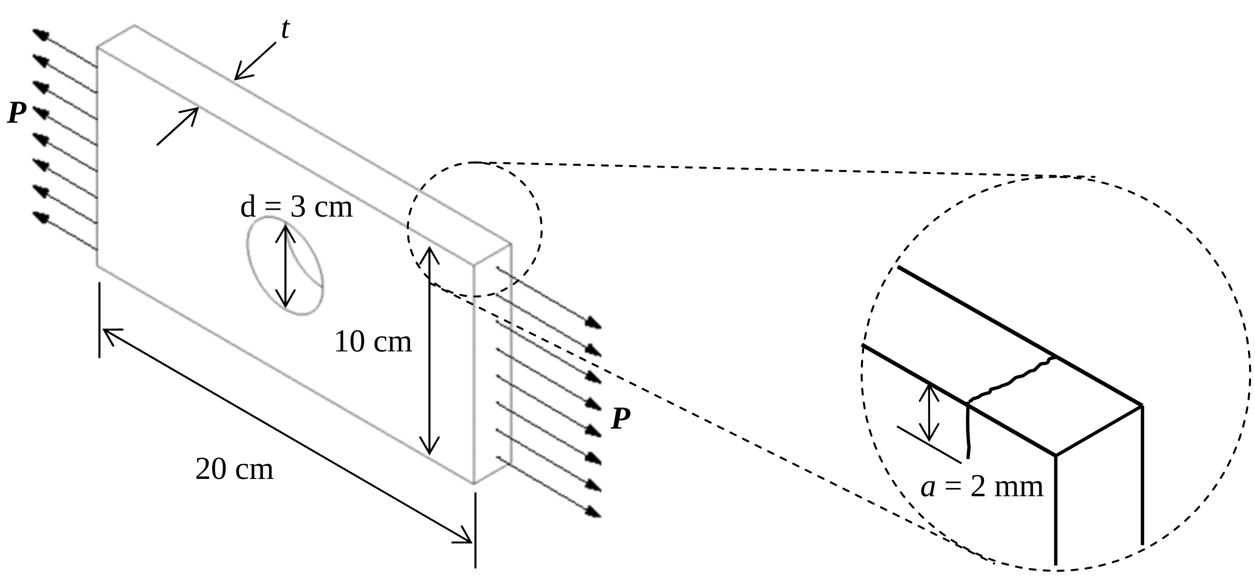
| | |
|---|---|
| ***Réponse :*** | **Une dislocation.** |

**f)** Nommez un défaut ponctuel (0 dimension) qui peut se retrouver dans une structure cristalline. (1 point)

| | |
|---|---|
| ***Réponse :*** | **Une lacune, un atome en solution d'insertion ou un atome en solution de substitution.** |

## Question N°3 Matériaux sous contrainte (5 points)

Une plaque trouée est soumise a un effort de traction *P* = 20 kN tel que schématisé à la Figure 2a. La plaque ne doit ni se déformer plastiquement ni se briser lorsque la force *P* est appliquée. La plaque peut-être fabriquée en époxy ou en zinc, à la demande du client. Les propriétés mécaniques des deux matériaux sont données dans le tableau 1 à la page suivante ainsi qu'un abaque donnant le facteur de concentration de contrainte d'une plaque trouée (Figure 3).




**2a) Dimensions de la plaque et orientation de la force P**

**2b) Fissure de profondeur *a***

**Figure 2 : Schéma de la plaque trouée**

**Tableau 1 : Propriétés mécaniques de l'époxy et d'un alliage de zinc**

| | ***E*** **(GPa)** | $R_e$ **(MPa)** | $R_m$ **(MPa)** | ***A*** **(%)** | $K_{IC}$ **(MPa·m½)** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Époxy** | 4 | ----- | 67 | ----- | ----- |
| **Alliage de zinc** | 85 | 320 | 404 | 5 | 15 |

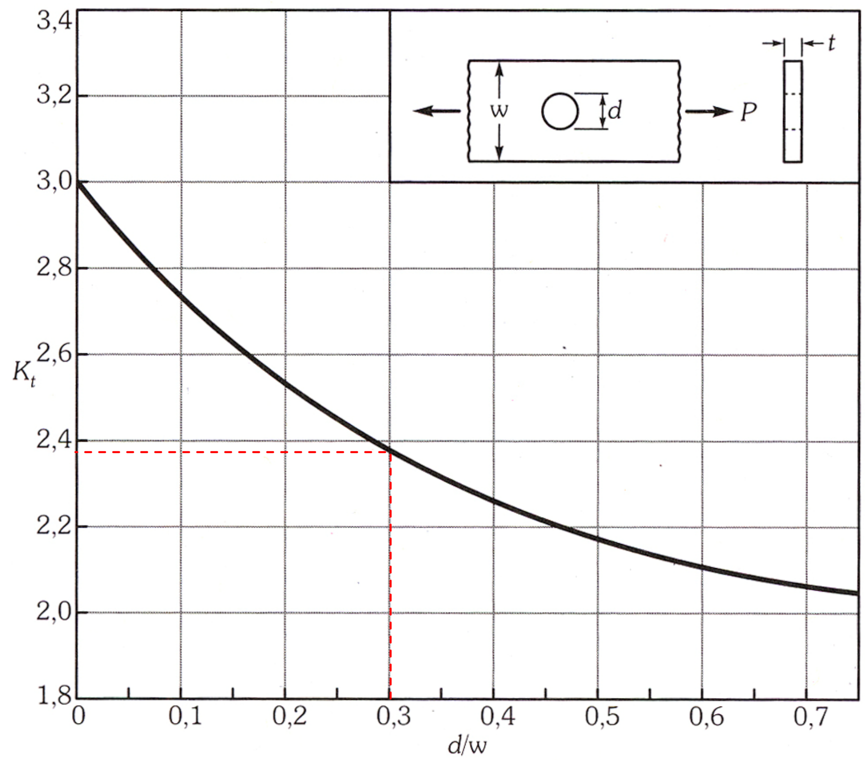



Figure 3 : Abaque du facteur de concentration de contrainte d'une plaque trouée

**a)** Quelle épaisseur minimale, $t_{min}$, doit avoir la plaque pour qu'elle puisse être fabriquée en époxy et en zinc ? *Justifiez votre réponse.* (2 points)

***Calculs :***

**La contrainte la plus faible est la résistance mécanique de l'époxy soit 67 MPa. Il faut donc que la contrainte locale au bord du trou demeure inférieure à 67 MPa.**

$$\sigma_{loc,max} = K_t \sigma_{nom} = K_t \left[\frac{P}{t\,(w-d)}\right]$$

**En utilisant l'abaque pour obtenir le $K_t$ avec *d/W = 0.3,* on trouve $K_t$= 2,37. Alors :**

$$t = \frac{K_t P}{\sigma_{loc,max}(w-d)} = \frac{(2,37)(20 \times 10^3\ N)}{(67 \times 10^6\ N/m^2)([100-30] \times 10^{-3}\ m)} = 10,11 \times 10^{-3}\ m$$

| | |
|---|---|
| $t_{min}$ = | **10,11** mm |

**b)** Pour une plaque fabriquée en époxy ayant l'épaisseur déterminée en **a)**, que se passera-t-il si l'on augmente la force appliquée *P* de 1 kN ? *Justifiez votre réponse.* (1 point)

***Réponse et justification :***

**Puisque l'époxy est fragile, il y aura une rupture brutale puisque la contrainte locale dépassera la limite de traction $R_m$. Il n'y aura pas de déformation plastique.**

---

Lors de la fabrication des plaques de zinc, une égratignure assimilable à une fissure a été produite en surface de la plaque dans une région éloignée du trou (Figure 2b). Cette fissure a une profondeur, $\boldsymbol{a}$, de 2 millimètres et est caractérisée par un facteur géométrique α de 1,12.

**c)** Est-ce que cette fissure causera la rupture brutale de la plaque de zinc dont vous avez déterminez l'épaisseur en **a)** ? (2 points)

***Calculs et justification :***

**Si le facteur d'intensité de contrainte associée à la fissure, *K*, dépasse le $K_{IC}$ du matériau, il y aura rupture brutale.**

$$K = \alpha\sigma_{nom}\sqrt{\pi a} = \alpha\left(\frac{P}{wt}\right)\sqrt{\pi a}$$

$$= (1,12)\frac{20\times10^{3}N}{(100\times10^{-3}m)(10,11\times10^{-3}m)}\sqrt{\pi(2\times10^{-3}m)}$$

$$= 1,756\ MPa\sqrt{m}$$

**Cette valeur est inférieure à 15 $MPa\sqrt{m}$ donc il n'y a pas de rupture brutale.**

| Rupture brutale ? (OUI ou NON) | NON |
|---|---|

## Question N°4 Diagrammes d'équilibre et durcissement (6 points)

En utilisant le diagramme d'équilibre de la Figure 4 :

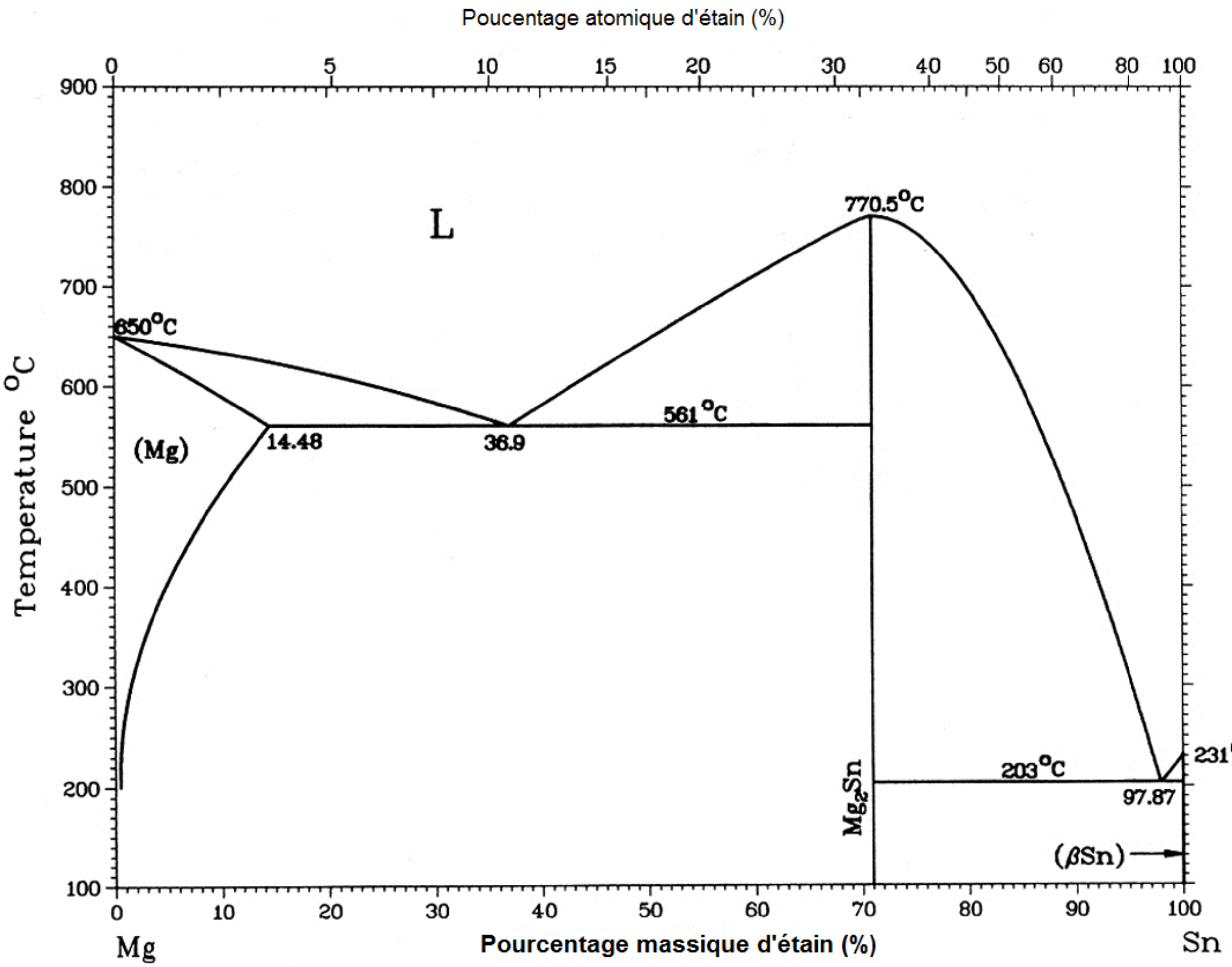



**Figure 4 : Diagramme Mg - Sn**

**a)** Quelle est la température de fusion de l'étain (Sn) ? (1 point)

| | |
|---|---|
| **Température :** | 231 °C |

**b)** Identifiez une réaction eutectique en écrivant cette réaction sous la forme « phase A + phase B + … → phase C + phase D + … » et en donnant la température de transformation. Spécifiez aussi, pour chaque phase à l'équilibre, sa composition chimique en % massique d'étain (Sn). (3 points)

**2 réponses sont possibles :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Réaction :** | L → (Mg) + $Mg_2Sn$ | ou | L → $Mg_2Sn$ + (βSn) |
| **Température :** | 561 °C | | 203 °C |

| Phase | composition de la phase (% massique Sn) |
|---|---|
| Liquide | 36,9 % |
| (Mg) | 14,48 % |
| $Mg_2Sn$ | 71 % |
| | |
| | |

ou

| Phase | composition de la phase (% massique Sn) |
|---|---|
| Liquide | 97,87 % |
| $Mg_2Sn$ | 71 % |
| (βSn) | 100 % |
| | |
| | |

**c)** Donnez la composition chimique d'un mélange de Mg et de Sn (en % massique d'étain, Sn) qui pourrait se prêter au durcissement structural. *Justifiez votre réponse.* (1 point)

| **Composition chimique (% massique Sn) :** | **Entre 1 % et 14,48 %** |
|---|---|

***Justifications :***

**Le mélange doit être monophasé et se situer dans une région où il y aura précipitation de l'élément en solution avec une baisse de la température. Donc tout mélange Mg qui contient entre 1 % et 14.48 % de Sn est une bonne réponse. L'efficacité du durcissement structural augmente avec le % de Sn.**

**d)** Par quelle méthode pourriez-vous durcir du magnésium (100 % Mg) ? (1 point)

| ***Méthode :*** | **Par écrouissage ou par affinement de la taille des grains.** |
|---|---|

## Question N°5 Propriétés en service (7 points)

Un arbre en rotation de diamètre $D_1$ est soumis à un moment de flexion *M*. Ce chargement se traduit par une sollicitation qui oscille périodiquement entre une contrainte de traction de +400 MPa et une contrainte de compression de -400 MPa. Le cycle de traction – compression se produit à chaque révolution de l'arbre. La vitesse de rotation de l'arbre est 300 rpm (tours/minute).

L'acier dont est fabriqué l'arbre est caractérisé par un seuil de propagation, $\Delta K_s$, de 10 MPa·m$^{½}$. Les courbes d'endurance qui caractérisent cet acier sont données à la Figure 5.

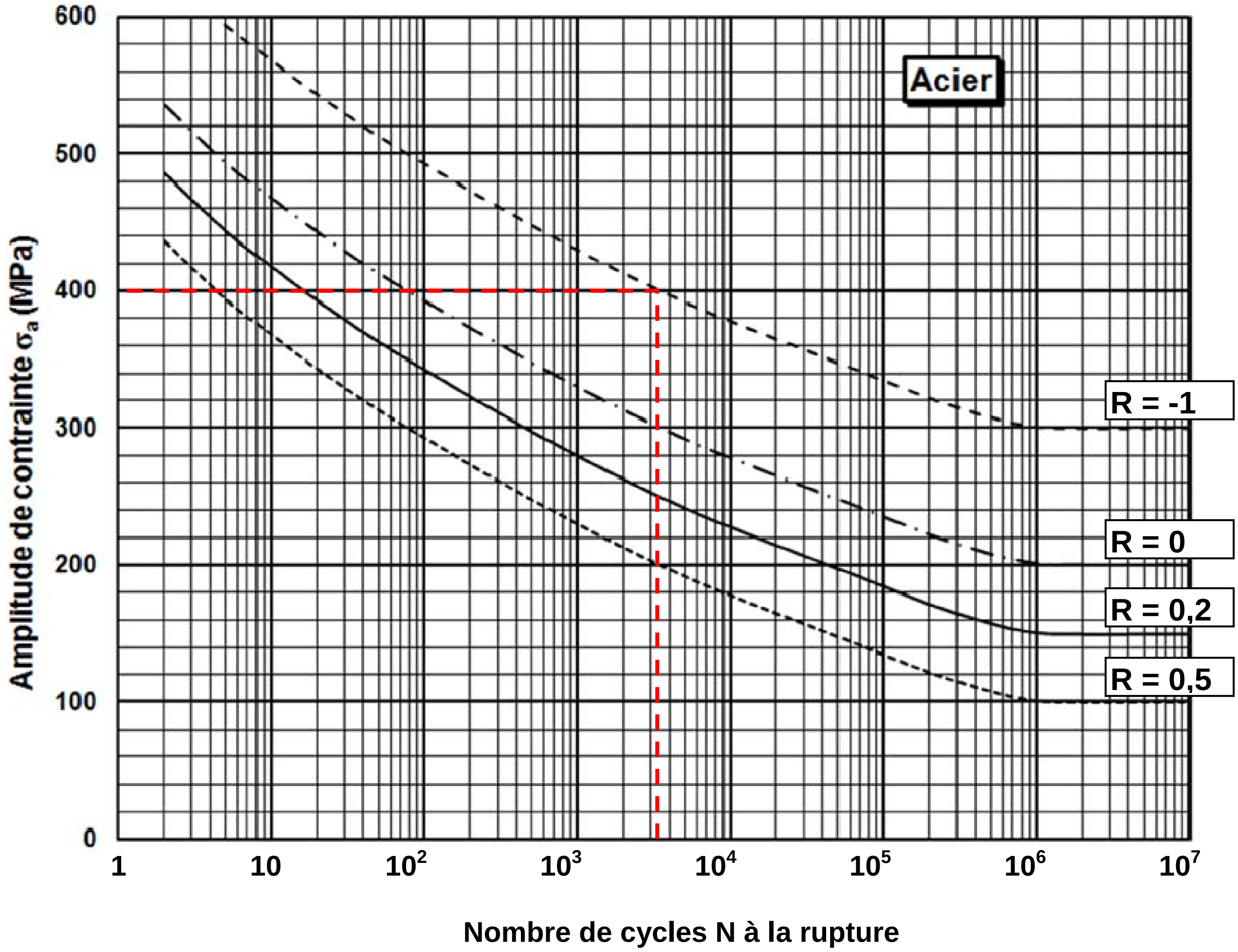



**Figure 5 : Courbes d'endurance de l'acier**

En utilisant les informations pertinentes, répondez aux questions suivantes et justifiez vos réponses par des calculs.

**a)** Quel est le rapport de contrainte ***R*** qui caractérise ce chargement cyclique ? (1 point)

***Calculs :***

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{-400\ MPa}{400\ MPa} = -1$$

| | |
|---|---|
| ***R* =** | **-1** |

**b)** Quelle est l'amplitude de contrainte $\sigma_a$, en MPa, de ce chargement cyclique ? (1 point)

***Calculs :***

$$\sigma_a = \frac{(\sigma_{max} - \sigma_{min})}{2} = \frac{(400-(-400))}{2} = 400\ MPa$$

| | | |
|---|---|---|
| $\sigma_a$ = | 400 | MPa |

**c)** Quelle est la fréquence **f**, en Hertz (Hz), de ce chargement cyclique ? (1 point)

***Calculs :***

**À chaque tour il y a 1 cycle. L'arbre tourne à 300 tours par minute donc :**

$$f = \frac{300\ tours}{minute} \times \frac{1\ minute}{60\ secondes} = \frac{5\ tours}{seconde}$$

**La fréquence est le nombre de cycles (ou tours) par seconde, d'où $f$ = 5Hz.**

| | | |
|---|---|---|
| f = | 5 | Hz |

**d)** Quelle est la durée de vie **t**, en minutes, de cet arbre ? (2 points)

***Calculs :***

**En utilisant l'amplitude de contrainte de 400 MPa et le rapport de contrainte $R$ = -1, il faut d'abord faire une lecture sur le graphique pour obtenir le nombre de cycles à la rupture.**

**On lit un nombre de cycles à la rupture N = $10^{3.5}$ cycles = 3162.27. Il y aura rupture après 3162 tours.**

**Avec la fréquence de 5 cycles par seconde, le nombre de minutes pour obtenir 3162 tours est :**

$$temps\ (minutes) = \frac{N}{f} \times \frac{1}{60} = \frac{3162}{5} \times \frac{1}{60} = 10,54\ minutes$$

| | | |
|---|---|---|
| t = | 10,54 | minutes |

**e)** D'au moins quel facteur, **n**, faudrait-il multiplier le diamètre $D_1$ de l'arbre pour atteindre une vie en fatigue infinie ($D_2$ = **n** $D_1$) ? (2 points)

Formule de la contrainte d'un arbre en flexion :

$$\sigma_{max} = |\sigma_{min}| = \frac{4M}{\pi r^3}$$

où *M* est le moment de flexion et *r* le rayon de l'arbre.

***Calculs :***

**À l'aide du graphique, on détermine d'abord que pour avoir une vie infinie, $\sigma_a \leq 300$ MPa.**

**À *R* = -1, cela implique que $\sigma_{max} = |\sigma_{min}| \leq 300$ MPa.**

**On cherche :**

$$n = \frac{D_2}{D_1} = \frac{r_2}{r_1}$$

**où $r_1$ est le rayon de l'arbre soumis à une contrainte maximale $\sigma_{1max}$ = 400 MPa et $r_2$ est le rayon de l'arbre soumis à une amplitude de contrainte $\sigma_{2max}$ = 300 MPa**

**Pour trouver n, on utilise l'équation qui donne les contraintes maximales et minimales d'un arbre soumis à un moment de flexion *M*, on peut poser les équations suivantes :**

$\sigma_{1max} = |\sigma_{1min}| = \frac{4\times M}{\pi r_1^3} = 400\ MPa$ **et** $\sigma_{2max} = |\sigma_{2min}| = \frac{4\times M}{\pi r_2^3} = 300\ MPa$ **alors :**

$$M = \frac{(400\ MPa)\pi r_1^3}{4} = \frac{(300\ MPa)\pi r_2^3}{4}$$

**Où, après simplifications, on a :** $\frac{r_2^3}{r_1^3} = \frac{400}{300}$ **et** $\frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{400}{300}\right)^{1/3} = 1,1006$

| | |
|---|---|
| **n =** | **1,1006** |

## Question N°6 Notions théoriques diverses (3 points)

Dites si les affirmations suivantes sont vraies (**V**) ou fausses (**F**).

**Attention :** Une mauvaise réponse annule une bonne réponse.

| | |
|---|---|
| La température de transition ductile-fragile des métaux CC (cubique centré) augmente lorsque l'on augmente la vitesse de l'essai de résilience Charpy. | **V** |
| La déformation plastique produite par les mécanismes de fluage est instantanée. | **F** |
| Après la trempe, le revenu de la martensite permet d'augmenter la limite d'élasticité de l'acier. | **F** |

Bonne chance! Bonnes vacances!

Myriam Brochu, responsable du cours
Richard Lacroix, chargé de cours

# Formulaire général

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

$$G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z}$$

$$R_{th} = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{a_0}}$$

$$1 = \frac{h\mathbf{x}}{n\mathbf{a}} + \frac{k\mathbf{y}}{n\mathbf{b}} + \frac{l\mathbf{z}}{n\mathbf{c}}$$

$$\mathbf{r} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}$$

$$\sigma_y = \sigma_{nom}\left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{r}}\right)$$

$$\tau = \frac{F}{S_0}\cos\theta\cos\chi$$

$$\tau_{th} = \frac{G}{2\pi}\frac{b}{a}$$

$$R_{e_{0,2}} = \sigma_0 + kd^{-1/2}$$

$$\ell_c = \frac{2E\gamma_S}{\pi\sigma^2}$$

$$K_C = \alpha\sigma\sqrt{\pi a}$$

$$f_S C_S + f_L C_L = C_0$$

$$D = D_0\exp\left(-\frac{Q_0}{kT}\right)$$

$$\varepsilon_{vel} = \frac{\sigma_t}{K_2}\left[1 - \exp\left(-\frac{K_2\,t}{\eta_2}\right)\right]$$

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$$

$$\frac{da}{dN} = C\left(\Delta K\right)^n$$

$$m = \frac{A i_{corr}\, t}{nF}$$

$$\Delta = \frac{(m_a)_{ox}\ \rho_M}{(m_a)_M\ \rho_{ox}}$$

$$R = \frac{\rho l}{S}$$

$$\sigma = n_e e \mu_e$$

$$\sigma = \left(n_e e\mu_e + n_t e\mu_t\right)$$

$$\sigma = \sigma_0\exp\left(\frac{-E_g}{2kT}\right)$$

$$E = E_0\left(0{,}9\,P^2 - 1{,}9\,P + 1\right)$$

$$R_m = \left(R_m\right)_0\, e^{-nP}$$

$$\Delta\theta^* = R_1 = \frac{R_m\,.f\left(\nu\right)}{E\alpha}$$

$$R_3 = \frac{E}{R_m^2.f\left(\nu\right)}$$

$$R_4 = \frac{E\gamma_S}{R_m^2.f\left(\nu\right)} = \gamma_S R_3$$

$$\left(R_m\right)_c = V_f\left(R_m\right)_f + \left(1 - V_f\right)\sigma_m$$

$$\left(R_m\right)_C = V_f\,\sigma_f + \left(1 - V_f\right)\left(R_m\right)_m$$

$$E_C = V_f\,E_f + V_m\,E_m$$

$$E_C \cong \frac{3}{8}V_f\,E_f + V_m\,E_m$$

$$\left(R_m\right)_C = kV_f\left(R_m\right)_f + V_m\,\sigma_m$$

$$V_{sphère} = \frac{4}{3}\pi r^3$$